

УДК 521.1:523.44-325

А.П. БАТУРИН

**ВЛИЯНИЕ СПОСОБОВ ПОСТРОЕНИЯ ЭФЕМЕРИД БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ И ЛУНЫ
НА ТОЧНОСТЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДОВ**

Продемонстрировано скачкообразное поведение координат планет и Луны, а также их производных, получаемых из современных эфемерид. Скачки координат и производных имеют место на границах смежных интервалов интерполирования, для каждого из которых в эфемеридах приведен свой набор коэффициентов при полиномах Чебышева. Демонстрация выполнена на примере эфемерид DE431 и EPM2011. Получены оценки точности прогнозирования движения ряда астероидов с использованием при учете возмущений эфемерид DE431 и EPM2011. Показано, что шаг численного интегрирования уравнений движения должен быть согласован с границами эфемеридных интервалов, в этом случае точность интегрирования повышается на несколько порядков. Кроме того, с целью устранения скачков самих координат и их первых производных, возникающих при расчетах с четверной точностью, разработан алгоритм сглаживания эфемерид на границах интервалов интерполирования, позволяющий устранять скачки координат и их производных до любого заданного порядка. Алгоритм применен для сглаживания эфемерид DE431 и EPM2011 до производных четвертого порядка. Показано, что при расчетах с четверной точностью применение сглаженных эфемерид позволяет повысить точность численного интегрирования примерно на 10 порядков.

Ключевые слова: DE431, EPM2011, разрывы производных, сглаживание.

В работах [1–4] опубликованы исследования автора, связанные с решением проблемы повышения точности численного прогнозирования движения астероидов при использовании для учета возмущений от больших планет и Луны современных эфемерид, выпускаемых Лабораторией реактивного движения США [5–7] и ИПА РАН [8, 9]. В [1–4] продемонстрировано скачкообразное поведение координат планет и их производных, получаемых из эфемерид: DE405, DE406, DE408, DE421, DE422, DE423, DE430, и рассмотрены способы устранения влияния этого поведения на точность прогнозирования движения астероидов. В данной работе представлены результаты аналогичного исследования для последних выпущенных к настоящему моменту эфемерид DE431 [7] и EPM2011 [8, 9].

Напомним, что в современных эфемеридах больших планет и Луны информация о координатах объектов хранится в сжатом виде с использованием интерполирующих полиномов Чебышева. Структура различных эфемерид в целом одинакова: весь охватываемый эфемеридой промежуток времени разделен на определенное число небольших интервалов интерполирования, для каждого из которых приведен свой набор коэффициентов при полиномах Чебышева. Причем на границах смежных интервалов сохраняется непрерывность интерполируемых «слева» и «справа» координат и их первых производных, а производные второго и более высокого порядка терпят разрывы. Кроме того, во всех выпущенных к настоящему времени эфемеридах коэффициенты при полиномах Чебышева приведены лишь с 16 десятичными знаками, т.е. в виде машинных чисел с плавающей запятой размером 64 бита (так называемые числа двойной точности). Поэтому интерполируемые координаты и их первые производные являются непрерывными на границах смежных интервалов также лишь при расчетах с двойной точностью. Однако в последнее время все чаще применяются расчеты с расширенной точностью, например с использованием машинных чисел с плавающей запятой размером 80 бит, соответствующих 19-значной десятичной разрядности [10, 11], или 128 бит, соответствующих 34-значной десятичной разрядности (так называемые числа четверной точности). Такая высокая машинная точность необходима, например, при поиске для астероидов орбит, приводящих к столкновению с Землей [12–14]. В этом случае интерполируемые координаты и их первые производные уже не являются непрерывными, а имеют скачки на границах эфемеридных интервалов примерно в 15–16 десятичных знаках.

Указанные скачки неизбежно проявляются в поведении правых частей дифференциальных уравнений, описывающих движение астероидов, поскольку правые части непрерывным образом зависят от координат возмущающих тел. Поэтому они также на границах эфемеридных интервалов имеют скачки, а именно: при расчетах с двойной точностью – скачки производных второго и более высоких порядков; при расчетах с расширенной точностью – скачки самих правых частей и их первых, вторых и т.д. производных. Такое поведение правых частей приводит к снижению точ-

ности численного интегрирования уравнений движения в обоих случаях, так как все методы численного интегрирования, как правило, предполагают непрерывность функций правых частей и их гладкость до сколь угодно высокого порядка.

В настоящее время существуют два подхода к построению эфемерид планет и Луны. Согласно первому подходу, применяемому в американских эфемеридах DE, в файлах эфемерид приводятся коэффициенты при полиномах Чебышева для интерполирования только координат объектов. Чтобы получить производные от координат (например, скорости или ускорения), следует продифференцировать выражения для интерполируемых координат необходимое число раз. Вторым подходом применяется в российских эфемеридах EPM [8, 9], согласно ему в файлах эфемерид приводятся коэффициенты для интерполирования скоростей объектов, а координаты вычисляются путем интегрирования выражений для скоростей, причем постоянные интегрирования также приводятся в эфемеридах. Производные от скоростей вычисляются так же, как и в американских эфемеридах.

Рассмотрим первый подход к построению эфемерид. Выражение для какой-либо интерполируемой координаты (обозначим ее через x) и ее производных имеет вид

$$x^{(k)}(\tau) = a_0 p_0^{(k)}(\tau) + \dots + a_n p_n^{(k)}(\tau), \quad (1)$$

где p_i – полиномы Чебышева i -й степени; a_i – приводимые в эфемеридах коэффициенты; n – число коэффициентов для данной координаты минус единица; k – порядок производной ($k=0$ соответствует самой координате); τ – нормированное время, пробегающее на интервале интерполирования значения от -1 до $+1$.

Полиномы Чебышева и их производные, входящие в (1), вычисляются с помощью рекуррентных соотношений [3]

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \quad p_1 = \tau, \quad p_i = 2\tau p_{i-1} - p_{i-2} \quad (i = 2, \dots, n), \\ p'_0 &= 0, \quad p'_1 = 1, \quad p'_i = 2(p_{i-1} + \tau p'_{i-1}) - p'_{i-2} \quad (i = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2)$$

$$p_0^{(k)} = 0, \quad p_1^{(k)} = 0, \quad p_i^{(k)} = 2(k p_{i-1}^{(k-1)} + \tau p'_{i-1}^{(k)}) - p_{i-2}^{(k)} \quad (i = 2, \dots, n; k \geq 2).$$

В рамках второго подхода по формуле, аналогичной формуле (1), вычисляются компоненты скорости. Поэтому, обозначив любую из трех компонент через v , можно записать

$$v^{(k)}(\tau) = a_0 p_0^{(k)}(\tau) + \dots + a_n p_n^{(k)}(\tau). \quad (3)$$

Выражение для координаты получается путем интегрирования по времени формулы (3) при $k=0$:

$$x(\tau) = C + \frac{T}{2} (a_0 w_0(\tau) + \dots + a_n w_n(\tau)), \quad (4)$$

где C – постоянная интегрирования, равная значению координаты x при $\tau=0$, т.е. в середине интервала интерполирования, имеющего длину T , и приводимая в эфемеридах вместе с коэффициентами a_i ; w_i – первообразные полиномов Чебышева p_i , вычисляемые через сами полиномы с помощью соотношений (<ftp://quasar.ipa.nw.ru/incoming/EPM/iaa-ephemerides-short-description.pdf>)

$$\begin{aligned} w_0 &= \tau, \quad w_1 = (p_0 + p_2)/4, \\ w_{2i} &= \frac{1}{2} \left(\frac{p_{2i+1}}{2i+1} - \frac{p_{2i-1}}{2i-1} \right), \quad w_{2i+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{2i+2}}{2i+2} - \frac{p_{2i}}{2i} \right) + \frac{(-1)^i}{4} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} \right), \quad (i = 1, \dots, [n/2]), \end{aligned} \quad (5)$$

где квадратные скобки означают целую часть числа. Для четных n последнее выражение в (5) при $i=[n/2]$ не используется.

Продемонстрируем скачкообразное поведение координат планет и их производных на границах смежных интервалов интерполирования в эфемеридах DE431 и EPM2011. Значения координат и их производных «слева» и «справа» на какой-либо границе вычисляются по формулам (1) и (4) с использованием соответствующего набора эфемеридных коэффициентов a_i и подстановки значения τ : $+1$ – для «левого» набора коэффициентов a_i и -1 – для «правого» набора. Обозначим вычисленные «слева» и «справа» координаты и их производные соответственно через $x_L^{(k)}, y_L^{(k)}, z_L^{(k)}$ и $x_R^{(k)}, y_R^{(k)}, z_R^{(k)}$. Относительная величина скачка на границе интервалов интерполирования определяется величиной

$$\Delta r_{\text{rat}}^{(k)} = \sqrt{\frac{(x_R^{(k)} - x_L^{(k)})^2 + (y_R^{(k)} - y_L^{(k)})^2 + (z_R^{(k)} - z_L^{(k)})^2}{(x_m^{(k)})^2 + (y_m^{(k)})^2 + (z_m^{(k)})^2}}, \quad (6)$$

где $x_m^{(k)} = (x_R^{(k)} + x_L^{(k)})/2$, $y_m^{(k)} = (y_R^{(k)} + y_L^{(k)})/2$ и $z_m^{(k)} = (z_R^{(k)} + z_L^{(k)})/2$. Величина (6) удобна потому, что она показывает, в каком десятичном знаке происходит скачок – это ее первый десятичный знак, отличный от нуля.

На рис. 1 приведены результаты вычисления $\Delta r_{\text{rat}}^{(k)}$ для барицентра системы Земля – Луна на 20 последовательных границах интервалов интерполирования, выбранных случайно вблизи середины соответствующих эфемерид (номер N границы отложен по горизонтальной оси). Значения k задавались от 0 до 5, т.е. выполнялось вычисление скачков самих координат и их производных до пятого порядка. В случае эфемерид EPM2011 величина k на рис. 1 также имеет смысл порядка производных от координат, а не от скоростей, как в формуле (3). Все расчеты выполнялись с четвертой точностью, необходимые вычислительные программы написаны автором самостоятельно, за исключением небольшого участка программного кода, связанного с вычислением первообразных полиномов Чебышева (5) и взятого из оригинального источника (ftp://quasar.ipa.nw.ru/incoming/EPM/Fortran/calc_eph.F).

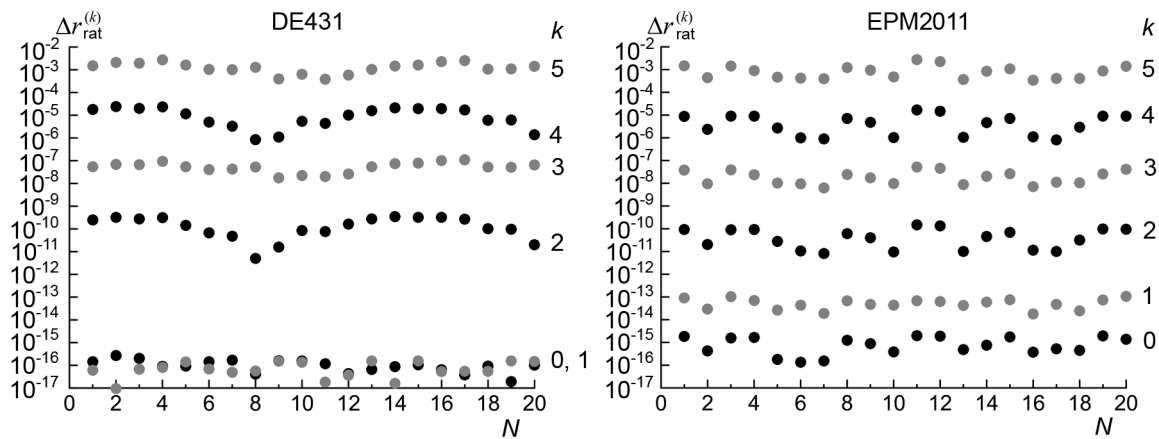


Рис. 1. Относительная величина скачков интерполируемых координат

Как видно из рис. 1, в эфемеридах DE431 координаты и их первые производные испытывают примерно одинаковые скачки в 16–17 десятичном знаке, вторые производные – в 10–12 знаке, третьи – в 7–8, четвертые – в 5–6, пятые – во 2–3. Скачки производных более высокого порядка становятся сравнимы с величиной самих производных и на рис. 1 не приведены. Что касается эфемерид EPM2011, то в них, как это видно из рис. 1, поведение координат и их первых производных отличается: если координаты испытывают скачки приблизительно в 15–16 знаках, то их первые производные – уже в 13–14. Скачки же производных более высокого порядка в обеих эфемеридах примерно одинаковы.

Продemonстрированное поведение координат и их производных характерно не только для барицентра системы Земля – Луна, но и для всех остальных объектов в данных эфемеридах, поэтому иллюстрации для них здесь не приведены. Отметим, что такое поведение свойственно всем американским эфемеридам и показано, например, в работах [2, 4] для эфемерид DE422 и DE430 [5].

Поскольку при расчетах с двойной точностью координаты эфемеридных объектов и их первые производные являются практически непрерывными, а скачки имеют лишь производные второго и более высокого порядка, то очевидным способом устранения влияния этих скачков на точность численного интегрирования является согласование шага интегрирования с границами эфемеридных интервалов. Такое согласование можно реализовать, введя дополнительную корректировку [2] шага интегрирования, заключающуюся в проверке попадания границы интервалов в пределы шага и, в случае ее попадания, в окончании шага на этой границе. Применение указанной корректировки позволяет полностью исключить влияние скачков производных второго и более высокого порядка, поскольку на каждом шаге решается задача Коши, входными данными для которой являются лишь координаты и их первые производные.

В результате решения системы (10) определяется $m+1$ неизвестных коэффициентов $b_i (i=0, \dots, m)$. Оставшиеся коэффициенты b_{m+1}, \dots, b_n остаются равными соответствующим коэффициентам a_{m+1}, \dots, a_n исходных эфемерид, однако их разрядность также увеличивается до 128 бит (четверной точности).

С помощью описанного способа было выполнено четыре варианта сглаживания эфемерид DE431: при $k=1, 2, 3, 4$, т.е. до первых, вторых, третьих и четвертых производных. В последних двух вариантах число коэффициентов n в сглаженных эфемеридах было увеличено до 7 в варианте $k=3$ для объектов от Сатурна до Плутона и до 9 в варианте $k=4$ для объектов от Юпитера до Плутона, причем «недостающие» для этого коэффициенты исходных эфемерид были приняты равными нулю. Все расчеты выполнялись с четверной точностью.

Сглаживание эфемерид EPM2011 выполнялось по аналогичному алгоритму с использованием переобозначений некоторых величин, поскольку в данных эфемеридах приведены коэффициенты для интерполирования не координат, а скоростей объектов. Так, в число коэффициентов a_i была включена в качестве нулевого коэффициента константа интегрирования C , а остальные коэффициенты нормированы путем умножения на $T/2$. Соответственно после выполнения сглаживания (решения системы (10)) коэффициент b_0 является исправленной константой интегрирования, а остальные коэффициенты b_i подвергаются обратной нормировке путем деления на $T/2$. В качестве «базовых» полиномов при сглаживании вместо полиномов Чебышева p_i используются их первообразные w_i . Для эфемерид EPM2011 были выполнены аналогичные четыре варианта сглаживания, как и для эфемерид DE431.

Для проверки отличия сглаженных эфемерид от исходных было выполнено вычисление относительных модулей разностей $\Delta r/r$ и $\Delta v/v$ векторов положения и скорости, получаемых из исходных и сглаженных эфемерид. Эти величины вычислялись с шагом $\Delta\tau=1/128$ для всех интервалов интерполирования. В таблице приведены их средние ($\overline{\Delta r/r}, \overline{\Delta v/v}$) и максимальные ($\underline{\Delta r/r}, \underline{\Delta v/v}$) значения для всех интервалов и объектов (от Меркурия до Солнца). Значение k для эфемерид EPM2011 в таблице имеет тот же смысл, что и для эфемерид DE431 (порядок производных от координат, а не от скоростей).

Отличия сглаженных эфемерид от исходных

Эфемериды	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$	
	$\frac{\overline{\Delta r/r}}{\underline{\Delta r/r}}$	$\frac{\overline{\Delta v/v}}{\underline{\Delta v/v}}$	$\frac{\overline{\Delta r/r}}{\underline{\Delta r/r}}$	$\frac{\overline{\Delta v/v}}{\underline{\Delta v/v}}$	$\frac{\overline{\Delta r/r}}{\underline{\Delta r/r}}$	$\frac{\overline{\Delta v/v}}{\underline{\Delta v/v}}$	$\frac{\overline{\Delta r/r}}{\underline{\Delta r/r}}$	$\frac{\overline{\Delta v/v}}{\underline{\Delta v/v}}$
DE431	$4.3 \cdot 10^{-17}$ $2.1 \cdot 10^{-16}$	$4.5 \cdot 10^{-15}$ $1.8 \cdot 10^{-13}$	$2.7 \cdot 10^{-12}$ $8.7 \cdot 10^{-10}$	$4.2 \cdot 10^{-11}$ $2.5 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-12}$ $6.0 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$ $1.7 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$ $2.1 \cdot 10^{-8}$	$7.9 \cdot 10^{-10}$ $6.3 \cdot 10^{-8}$
EPM2011	$2.6 \cdot 10^{-13}$ $6.3 \cdot 10^{-12}$	$4.3 \cdot 10^{-12}$ $9.9 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-11}$ $4.0 \cdot 10^{-10}$	$5.6 \cdot 10^{-11}$ $1.2 \cdot 10^{-9}$	$7.8 \cdot 10^{-11}$ $2.7 \cdot 10^{-9}$	$5.5 \cdot 10^{-10}$ $1.2 \cdot 10^{-8}$	$5.2 \cdot 10^{-10}$ $2.3 \cdot 10^{-8}$	$3.3 \cdot 10^{-9}$ $8.4 \cdot 10^{-8}$

Как видно из таблицы, координаты, вычисляемые с помощью сглаженных и исходных эфемерид DE431, в случае сглаживания лишь до первых производных ($k=1$), отличаются не более чем в 16 десятичном знаке. Отличие в скоростях имеет место примерно в 13–15 знаке. В случае сглаживания до производных более высокого порядка ($k \geq 2$) отличия сглаженных эфемерид от исходных возрастают. Так, при $k=4$ отличие может проявляться уже в 8 десятичном знаке. Поэтому эфемериды, сглаженные до производных второго и более высокого порядка, в практических целях использовать не рекомендуется. Далее они используются лишь для оценивания вклада скачков указанных производных в понижение точности численного интегрирования уравнений движения. Сглаженные варианты эфемерид EPM2011 отличаются от их исходного варианта значительно, чем при сглаживании эфемерид DE431.

С целью демонстрации возможного повышения точности численного интегрирования уравнений движения было выполнено прямое и обратное прогнозирование движения двух астероидов, сильно различающихся эксцентриситетом орбиты. Астероиды были выбраны по данным сайта Центра малых планет (<http://minorplanetcenter.net>) из числа недавно открытых объектов и имеют следующие элементы орбиты: астероид 2014 VT32 – $a=1.12$ а.е., $e=0.14$, $i=8.5^\circ$ (период обращения около года); астероид 2014 VH25 – $a=2.66$ а.е., $e=0.69$, $i=9.6^\circ$ (период обращения около 4 лет).

При прогнозировании движения учитывались возмущения от девяти планет и Луны с использованием эфемерид DE431 и EPM2011 в их исходном и сплаженных вариантах. Вычисления выполнялись как с четверной, так и с обычной двойной точностью. Для численного интегрирования применялся метод Эверхарта, описанный в [15] и усовершенствованный в [16]. При расчетах с двойной точностью использовался метод 15-го порядка, при расчетах с четверной точностью – 31-го порядка. Прогнозирование выполнялось с переменным шагом как с корректировкой шага интегрирования в соответствии с границами эфемеридных интервалов, так и без корректировки.

При выполнении корректировки учитывался минимальный размер интервала интерполирования, который в эфемеридах DE431 составляет 4 сут (для Луны), причем интервалы интерполирования для других объектов кратны этому значению. Поэтому в случае использования эфемерид DE431 выполняется проверка попадания в пределы шага интегрирования момента времени с юлианской датой, кратной четырем (после вычитания дробной половины суток), и если такой момент попадает в пределы шага, то шаг на нем заканчивается. В эфемеридах EPM2011 имеется два несоизмеримых минимальных интервала интерполирования – 4 сут (для Луны и Солнца) и 5 сут (для Меркурия), а интервалы интерполирования для остальных объектов кратны этим двум минимальным. Поэтому в данном случае при выполнении корректировки выполняется проверка попадания в пределы шага юлианских дат, кратных четырем и пяти (после вычитания дробной половины суток).

Прогнозирование движения выполнялось на интервале времени от начальной эпохи элементов орбиты (5 февраля 2014 г.) и до конца периода, охватываемого эфемеридами EPM2011 (октябрь 2214 г.). Выдача координат производилась путем выхода из интегратора через каждые 50 сут для объекта 2014 VT32 и 200 сут для объекта 2014 VH25. Конечная дата интегрирования немного варьировалась, чтобы интервал прогнозирования был кратным этим значениям. Далее выполнялось сравнение координат, выданных при прямом и обратном интегрировании на одни и те же моменты времени, путем вычисления модуля их разности Δr .

На рис. 2 приведены результаты для астероида 2014 VT32 и на рис. 3 – для астероида 2014 VH25. Были выполнены варианты прогнозирования с использованием:

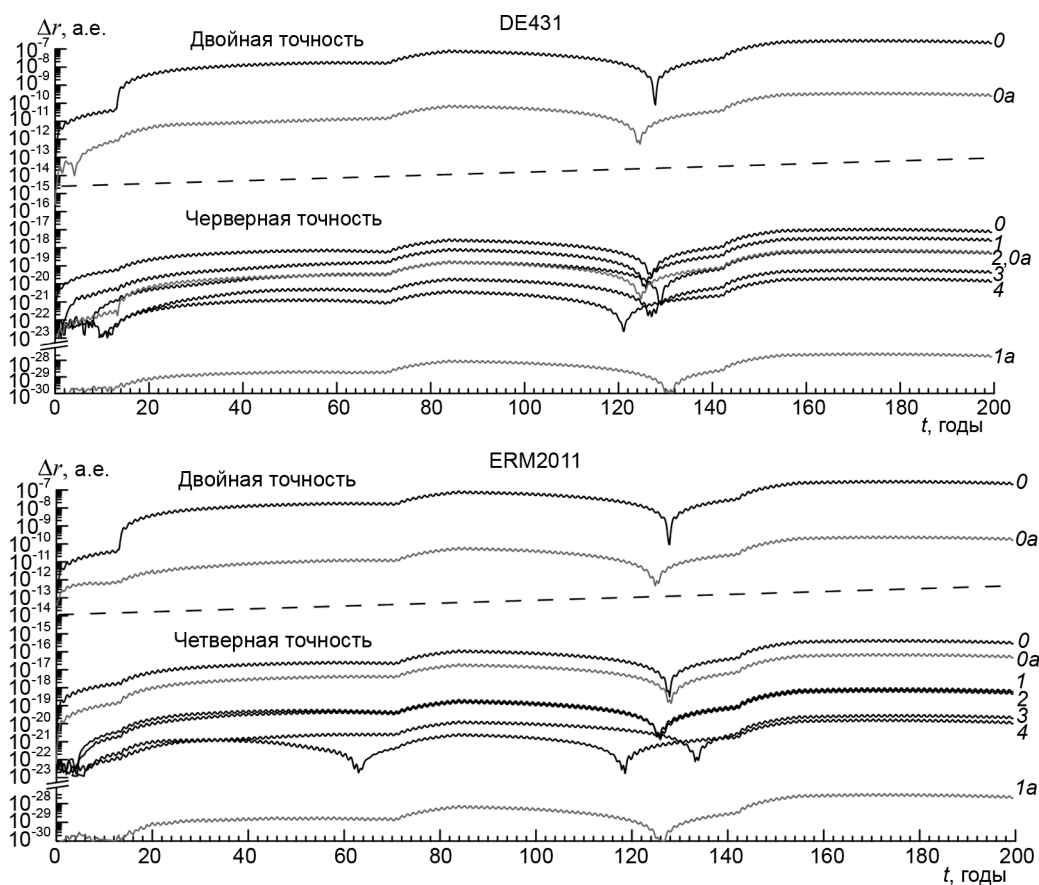


Рис. 2. Сравнение результатов прямого и обратного прогнозирования движения астероида 2014 VT32 с использованием эфемерид DE431 и EPM2011

- оригинальных эфемерид (кривые 0);
- эфемерид, сглаженных до первых производных (кривые 1);
- эфемерид, сглаженных до вторых производных (кривые 2);
- эфемерид, сглаженных до третьих производных (кривые 3);
- эфемерид, сглаженных до четвертых производных (кривые 4).

Кроме того, варианты 0 и 1 были просчитаны как с корректировкой шага интегрирования, так и без нее. В случае применения корректировки к обозначению кривых добавлена буква «а», а сами кривые и их обозначения выполнены серым цветом. Результаты, полученные с двойной и четверной точностью, на рис. 2 и 3 разделены пунктирной линией.

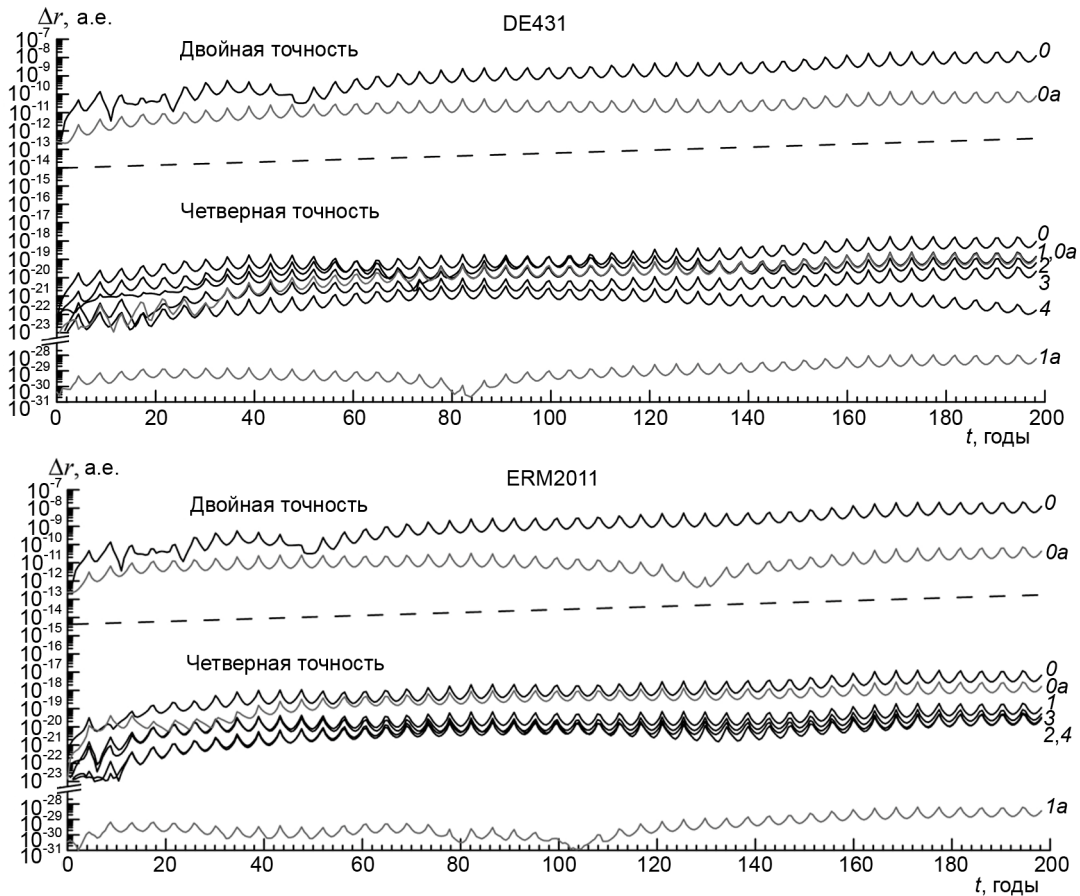


Рис. 3. Сравнение результатов прямого и обратного прогнозирования движения астероида 2014 BH25 с использованием эфемерид DE431 и ERM2011

Из рис. 2 и 3 видно, что при расчетах с обычной двойной точностью согласование шага интегрирования с границами эфемеридных интервалов интерполирования приводит к повышению точности интегрирования примерно на 2–3 порядка (кривые 0 и 0a). Положения кривых 0 и 0a, полученных при расчетах с четверной точностью, различаются меньше, и в данном случае повышение точности происходит в среднем на 1 порядок. Использование сглаженных эфемерид (кривые 1–4) приводит к повышению точности на несколько порядков, и это повышение, в целом, находится в прямой зависимости от максимального порядка сглаженных производных, хотя могут быть и небольшие отклонения от этой зависимости (кривые 2 и 3 на рис. 3). И наконец, максимальное повышение точности (на 10 и более порядков) имеет место в случае совместного применения сглаженных эфемерид и корректировки шага интегрирования (кривые 1a).

Проведенное исследование позволяет заключить, что при прогнозировании движения астероидов с использованием при учете возмущений каких-либо эфемерид больших планет и Луны шаг численного интегрирования должен быть согласован с границами эфемеридных интервалов интерполирования. Особенно это касается случая, когда расчеты выполняются с традиционной двойной точностью – как показано выше, точность интегрирования с использованием соответствующей корректировки шага может быть повышена на несколько порядков. В случае расчетов с четверной точностью, все более часто применяемых в небесной механике, помимо корректировки

шага следует использовать эфемериды, в которых сохраняется непрерывность координат объектов и их первых производных с указанной точностью на границах смежных интервалов интерполирования. Использование таких эфемерид совместно с корректировкой шага позволяет прогнозировать движение астероидов с максимально возможной точностью, обеспечиваемой 128-битовой разрядной сеткой. Очевидно, что такие эфемериды сами по себе должны быть 128-битовыми, т.е. содержать коэффициенты четверной точности. Поэтому хотелось бы обратиться к разработчикам современных эфемерид с просьбой в дальнейшем публиковать эфемериды, рассчитанные с четверной точностью и соответственно с такой же точностью сохраняющие непрерывность координат объектов и их первых производных. Сохранение непрерывности производных более высокого порядка необязательно, так как влияние их разрывов на точность численного интегрирования полностью устраняется с помощью согласования величины шага с границами эфемеридных интервалов интерполирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батури́н А. П. // Изв. вузов. Физика. – 2011. – Т. 54. – № 6/2. – С. 93–102.
2. Батури́н А. П. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 10/2. – С. 82–88.
3. Батури́н А. П., Вотчель И. А. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 6/3. – С. 188–190.
4. Батури́н А. П., Вотчель И. А. // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 10/2. – С. 19–24.
5. Standish E. M. JPL planetary and lunar ephemerides DE405/LE405, JPL Interoffice Memorandum. – Pasadena, 1998. – V. 312.F-98-048. – 18 p.
6. Folkner W. M., Williams J. G., and Boggs D. H. The Planetary and Lunar Ephemeris DE421, JPL Interoffice Memorandum. – Pasadena, 2008. – V. 343R-08-003. – 31 p.
7. Folkner W. M. et al. The Planetary and Lunar Ephemeris DE430 and DE431, IPN Progress Report 2-196. – February 15, 2014. – 81 p.
8. Pitjeva E. V. // Solar System Res. – 2013. – V. 47. – Iss. 5. – P. 386–402.
9. Питьева Е. В. // *Астрономический вестник*. – 2005. – Т. 39. – № 3. – С. 202–213.
10. Chernitsov A. M. and Baturin A. P. // Solar System Res. – 2001. – V. 35. – Iss. 4. – P. 327–338.
11. Syusina O. M., Chernitsov A. M., and Tamarov V. A. // Solar System Res. – 2012. – V. 46. – Iss. 3. – P. 195–207.
12. Выкова Л. Е. and Galushina T. Yu. // Cosmic Res. – 2010. – V. 48. – Iss. 5. – P. 409–416.
13. Батури́н А. П. // Изв. вузов. Физика. – 2011. – Т. 54. – № 6/2. – С. 103–109.
14. Батури́н А. П. // Изв. вузов. Физика. – 2012. – Т. 55. – № 10/2. – С. 34–49.
15. Бордови́цына Т. В. *Современные численные методы в задачах небесной механики*. – М.: Наука, 1984. – 136 с.
16. Авдюше́в В. А. // *Вычислительные технологии*. – 2010. – Т. 15. – № 4. – С. 31–46.

Национальный исследовательский Томский государственный университет,
г. Томск, Россия
E-mail: alexbaturin@sibmail.com

Поступила в редакцию 26.03.14.